Chapitre I
Rappels mathématiques

I- Grandeurs et unités

I.1- Grandeurs fondamentales

Ce sont les grandeurs pour lesquelles on a choisi des étalons. Elles sont indépendantes les unes des autres. Un étalon ne doit pas varié au cours du temps.
Exemple des grandeurs fondamentales : longueur, masse, temps

I.2- Grandeurs dérivées

Ces grandeurs s'expriment comme une combinaison (multiplication, division) des grandeurs fondamentales.
Exemple : Vitesse = longueur/temps
Accélération = longueur/temps x temps
Force = masse x accélération = masse x longueur/(temps)^2

I.3- Système d'unités

On peut choisir quelques grandeurs pour constituer un système d'unités. Exp : CGS (centimètre, gramme, seconde), MKS (mètre, kilogramme, seconde).
Le système international (S.I) d'unité comporte trois grandeurs fondamentales.

Grandeur	symbole	Unité S.I	symbole	Définition
Longueur	L	mètre	m	Le mètre est une unité de longueur qui est calibrée par « la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299792458 secondes ».
Masse	M	kilogramme	kg	Le kilogramme est une unité de masse qui est calibré par « la masse du prototype international en platine iridié, sanctionné par la conférence générale des poids et mesures en 1889 et déposé au bureau international des poids et mesures ».
Temps	T	seconde	s	La seconde est une unité de temps qui est calibrée par « la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133 ».
Intensité du courant électrique	I	Ampère	A	L'ampère est une unité d'intensité de courant qui est calibrée par « un courant constant qui produit une force de 2.10-7 newton par mètre de longueur ». Ce courant doit être « maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide ».
Température theremodynamique	θ	kelvin	K	Le kelvin est une unité de température thermodynamique qui est calibré par « la fraction 1/273,16 de la température thermodynamique du point triple de l'eau ».
Quantité de matière	μ	mole	mol	La mole est une unité de quantité de matière d'une entité élémentaire donnée (atome, ion, molécule, électron, …, ou des groupements spécifiés de telles particules.) qui est calibrée par « la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kilogramme de carbone 12 ».
Intensité luminseuse	J	candela	cd	La candela est une unité d'intensité lumineuse qui est calibrée par « l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence 540.1012 hertz et dont l'intensité énergique dans cette direction est 1/683 watt par stéradian ».

En mécanique toutes les grandeurs utilisées peuvent êtres exprimées en fonction de la longueur, le temps et la masse.

Dimensions et unités de quelques grandeurs dérivées

Grandeur	symbole	dimension	symbole
Masse volumique	ρ	ML^{-3}	Kg/m^3
Débit volumique	q_v	L^3T^{-1}	$m^3.s^{-1}$
Viscosité dynamique	η	ML^2T^{-1}	Pa.s
Quantité de mouvement	p	MLT-1	N.s-1
Fréquence	f	T^{-1}	Hz
Période	T	T	s
Résistance électrique	R	$ML^2T^{-3}I^{-2}$	Ω
Différence de potentiel	V	$ML^2T^{-3}I^{-1}$	volt
Champ électrique	E	$MLT^{-3}I^{-1}$	v/m
Champ magnétique	H	$L^{-1}I$	A.m^{-1}
Capacité électrique	C	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	farad

I.4- Equation aux dimensions

Soit G une grandeur physique. La dimension de G est notée [G].
Si G est une longueur : [G] = L
Si G est une vitesse : [G] = L. T^{-1}
D'une manière générale, dans le S.I, l'équation aux dimensions d'une grandeur G s'écrit : $[G] = L^a.M^b.T^c.I^d.\theta^e.\mu^f.J^h$
Avec a, b, c, d, e, f et h sont des nombres réels.
Exemples : écrire les équations aux dimensions des grandeurs suivantes :
La vitesse : [v] = L. T^{-1}
L'accélération : [γ] = L. T^{-2}
La force : [F] = M.L. T^{-1}
L'énergie, le travail : [E] = [W] = M.L^2. T^{-1}
La surface : [S] = L^2
Le volume : [V] = L^3

I.4.1- Homogénéité d'une formule

- Une formule est homogène si les deux membres ont les mêmes dimensions.
- Il ne suffit pas qu'une formule soit homogène pour qu'elle soit juste.
- On ne peut additionner ni soustraire que les termes ayant les mêmes dimensions.

II. Les fonctions usuelles

a) Polynômes : $y = f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$
b) Trigonométriques :$y = f(x) = \cos x$; $y = f(x) = \sin x$; $y = f(x) = \tan x$; $y = f(x) = \text{cotg}\, x$
Propriétés :

- $\sin^2\alpha + \cos^2\beta = 1$
- $\sin(\alpha \mp \beta) = \sin\alpha\cos\beta \mp \cos\alpha\cos\beta$
- $\cos(\alpha \mp \beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\sin\beta$

c) exponentielle :

y = e^x = expx
d) Logarithme : n'est définie que pour x > 0
y = logx ; log(x_1 x_2) = logx_1 + logx_2 ; log(x_1 /x_2) = logx_1 – logx_2

II.1- Dérivée d'une fonction

a) fonction

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \longrightarrow o} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

- $(x^a)' = a\ \ x^{a-1}$
- (Cos x)'=sin x
- (sin x)'=cos x
- (f +g)'=f '+g'
- $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{f^2}$
- $(e^x)'=e^x$; (log x)' = $\frac{1}{x}$

Exemple calculer la dérivée $\begin{cases} x = be^{-kt}\cos(kt) \\ y = be^{-kt}\sin(kt) \end{cases}$

b) *Dérivation multiple :*

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

II.2- Fonction à plusieurs variables
II.2.1- Dérivée partielle

$$f'_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta a, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

De même par rapport à y (x est constant)

II.2.2- Différentielle : on montre que $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$

II.3- Intégrales : $\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)dx_1$

II.3.1- Primitives et intégrales : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

F est la primitive de f : $F'(x) = f(x)$

Intégrale par partie

$$(fg)' = f'g + fg' \Rightarrow [fg]_a^b - \int_a^b f'gdx$$

II.3.2- Changement de variable

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_a}^{t_b} f(g(t))g'(t)dt$$

III. Incertitudes et erreurs

III.1- types d'erreurs

- *Erreurs systématiques* : Elles sont dues généralement aux appareils de mesures. Elles se produisent toujours dans le même sens. (réglage de l'instrument de mesure)
- *Erreurs aléatoires :* Dues généralement aux expérimentateurs et se produisent de part et d'autre de la valeur vraie.

III.2- Expression des erreurs :

a) *erreur absolue* : $e_a = |X_m - X_v|$

avec X_m est la valeur mesurée

et X_v est la valeur vraie (inconnue)

Eerreur relative : $e_r = \frac{|X_m - X_v|}{X_v}$

b) *Incertitude absolue* : $\Delta X = \lim\sup|X_m - X_v|$

c) *Incertitude relative* : $\frac{\Delta X}{X_m} = \frac{|X_m - X_v|}{X_v}$

La précision de la mesure est donnée par la relation : $\varepsilon(\%) = 100 \bullet \frac{\Delta X}{X_m}$

III.3- Calculs d'erreurs :

a) Si la mesure d'une grandeur G se fait directement l'erreur globale est commise est la somme des erreurs dues à l'instrument (i), des erreurs systématiques (s) et des erreurs de lecture (l) soit :

$$\Delta G = \Delta G_i + \Delta G_s + \Delta G_l$$

b) Si la mesure de la grandeur G se fait indirectement où G est déduite des mesures des grandeurs X, Y, Z, l'incertitude peut être calculée par deux méthodes :

- différentielle totale : G est fonction à trois variables X,Y,Z G = G(X,Y,Z)

$$dG = (\frac{\partial G}{\partial x})dx + (\frac{\partial G}{\partial y})dy + (\frac{\partial G}{\partial z})dz$$

Pour passer aux incertitudes, on remplace le d par Δ et on met les valeurs absolues :

$$\Delta G = \left|(\frac{\partial G}{\partial x})\right|\Delta x + \left|(\frac{\partial G}{\partial y})\right|\Delta y + \left|(\frac{\partial G}{\partial z})\right|\Delta z$$

Exemple : soit l'expression : $A = k\dfrac{x^m\, y^n}{z^p}$ où k est une constante et m, n et p sont des réels. Déterminer l'expression de l'incertitude $\dfrac{\Delta A}{A}$ en fonction de Δx, Δy et Δz

Réponse :

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{kmx^{m-1}y^n}{z^p} \; ; \; \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{kny^{n-1}x^m}{z^p} \; ; \; \frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{kpx^m y^n}{z^{p+1}}$$

$$\frac{\Delta A}{A} = m\frac{\Delta x}{x} + n\frac{\Delta y}{y} + p\frac{\Delta z}{z}$$

- dérivée de la fonction logarithmique

Pour mettre en évidence cette méthode, reprenons l'exemple ci-dessus.

Log A = log k + mlog x + nlog y + p log z

$$\frac{dA}{A} = m\frac{dx}{x} + n\frac{dy}{y} - p\frac{dz}{z}$$

On remplace dx, dy, dz, dA par Δx, Δy, Δz, ΔA et le signe (-) par le signe (+) puisque les incertitudes ne peuvent se compenser, soit :

$$\frac{\Delta A}{A} = m\frac{\Delta x}{x} + n\frac{\Delta y}{y} + p\frac{\Delta z}{z}$$

Exemple :

La période (T) d'un pendule simple est donnée par : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ avec l est la longueur et g est l'accélération de la pesanteur.

On donne g = 9,81 m/s^2 avec une précision de 0,1 % et l = (0,5 ± 0,002) m.

Réponse :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 1{,}418 \text{ s}$$

$$\log T = \log 2\pi + \frac{1}{2}\log l + \frac{1}{2}\log g$$

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{2}\left(\frac{dl}{l} - \frac{dg}{g}\right) \; ; \; \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta g}{g}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{0{,}002}{0{,}5} + \frac{1}{1000}\right)$$

IV- Vecteurs

IV.1- Introduction

L'usage des vecteurs en mécanique est fondamental. Il permet de représenter les vitesses et les accélérations des points, les rotations des solides, les forces exercées, le déplacement…

IV.2- Notion de direction

Une ligne droite peut être parcourue dans deux directions. Une fois le sens positif est déterminé nous disons que la droite est orientée et nous l'appelons axe. On indique le sens positif par une flèche. Un axe définit une direction.

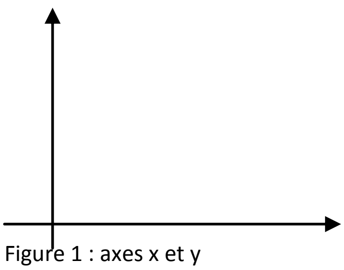


Figure 1 : axes x et y

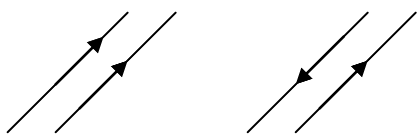


figure 2 : directions parallèles et anti-parallèles

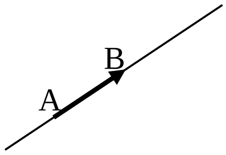
IV.3- Scalaire et vecteur

Beaucoup de quantités physiques sont complètement déterminées par leurs grandeurs ; ces quantités sont appelées scalaires. Comme le volume, la surface, l'énergie, le travail. D'autres grandeurs nécessitent pour leur détermination complète une direction en plus de leurs grandeurs. Nous appelons vecteurs de telles grandeurs. Le cas le plus évident le déplacement.

IV.4- Définition

Un vecteur est un segment de droite orienté. Il est caractérisé par

- le point d'application (le point A)
- une extrémité (le point A)
- une direction (droite Δ)
- un sens (indiqué par la flèche)
- un module (la longueur du segment [AB])



Deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont égaux s'ils ont la même intensité (longueur), la même direction et le même sens.

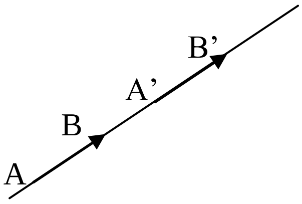
IV.5- Types de vecteurs

IV.5.1- Vecteurs liés – vecteurs libres

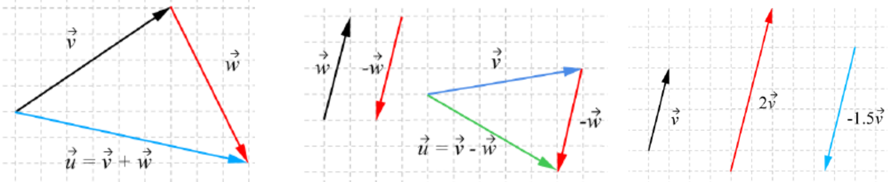
La distinction entre vecteurs libres et vecteurs peut se résumer : on peut dire qu'on n'effectue les opérations que sur des vecteurs libres tandis qu'on ne peut dessiner que des vecteurs liés.

IV.5.2- Vecteurs glissants

La représentation des forces fait appel au concept de vecteur glissant. Pour ce vecteur, le point d'application est n'importe où sur le support. Un ensemble de vecteurs liés équipollent à un vecteur lié. Il s'agit donc d'une représentation intermédiaire entre le vecteur lié et le vecteur libre.



IV.5.3- Opérations sur les vecteurs

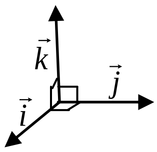


Si λ et μ sont deux scalaires et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont deux vecteurs, on peut écrire :

$\boldsymbol{\lambda(\vec{v}+\vec{w}) = \lambda\vec{v}+\lambda\vec{w}\,;\,(\lambda+\mu)\vec{v} = \lambda\vec{v}+\mu\vec{v}\,;\,\lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}\,;\,1\vec{v} = \vec{v}\,;\,0\vec{v} = \vec{0}}$

IV.6- Bases et composantes d'un vecteur

IV.6.1- Base orthonormée directe



$(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base orthonormée si :

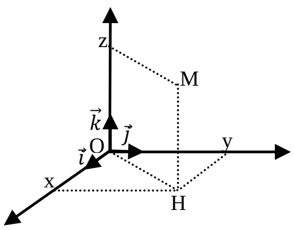
- $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$ et $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$

De plus si en faisant la rotation de $\vec{i}$ vers $\vec{j}$, on progresse selon $\vec{k}$ (règle du tire bouchon), on dit que la base est directe.

IV.6.2- Coordonnées cartésiennes d'un point – composantes d'un vecteur

Un vecteur a des composantes sur une base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Ainsi, on écrit :

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ également noté $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On dit que les coordonnées cartésiennes de M sont x, y et z. On écrit $M(x,y,z)$



IV.8-Calcul vectoriel

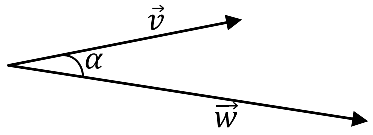
IV.8.1-Norme d'un vecteur

Si $\vec{v}$ est un vecteur, on utilise le symbole $\|\vec{v}\|$ pour représenter la **norme** de $\vec{v}$.

Dans le plan muni d'un système orthonormé, si $\vec{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ on a : $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Un vecteur $\vec{v}$ pour lequel la norme $\|\vec{v}\| = 1$ est qualifié de vecteur unité (ou **unitaire**).

IV.8.2- Produit scalaire



Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est le nombre algébrique défini par la relation : $\vec{v}.\vec{w} = \|\vec{v}\|.\|\vec{w}\|.\cos\alpha$

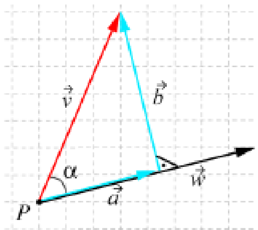
Propriétés

- $\vec{v}.\vec{v} = \|\vec{v}\|^2$
- $\vec{v}.\vec{w} = 0$ si l'un au moins des deux vecteurs est nul ou Les deux vecteurs sont orthogonaux.
- $\alpha(\vec{v}.\vec{w}) = (\alpha\vec{v}).\vec{w})$
- $\vec{v}.(\vec{w} + \vec{u}) = \vec{v}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{u}$
- En utilisant les composantes $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ alors $\vec{v}.\vec{w} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

IV.8.3- Angle entre deux vecteurs

L'angle α entre deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est donné par $\cos\alpha = \frac{\vec{v}.\vec{w}}{\|\vec{v}\|.\|\vec{w}\|} = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}.\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$

IV.8.4- Projection d'un vecteur sur un autre vecteur

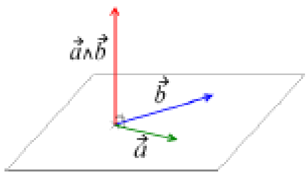


Soient $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs non nuls ayant la même origine P. Nous cherchons à décomposer $\vec{v}$ en deux vecteurs : $\vec{a}$ qui sera parallèle à $\vec{w}$ et $\vec{b}$ qui sera orthogonal à $\vec{w}$. Le vecteur $\vec{a}$ est la **projection orthogonale** de $\vec{v}$ sur $\vec{w}$: $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$

La longueur du vecteur $\vec{v}$ projeté orthogonalement sur $\vec{w}$ est $\|\vec{v}\|.\cos\alpha$

Attention ! cette propriété est très utile pour la décomposition d'un vecteur sur une base

IV.8.5- Produit vectoriel



Soient deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ formant un angle α. Par définition, le **produit vectoriel** de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est le vecteur noté $\vec{a} \wedge \vec{b}$ tel que :

1. La direction de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est **orthogonale** à chacun des deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$
2. le sens de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ donne au triplet $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b}\,)$ une **orientation directe ;**
3. la norme de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est égale à **l'aire du parallélogramme** construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$: $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.|\sin\alpha|$

Le produit vectoriel de deux vecteurs parallèles est donc un vecteur nul.

Propriétés

- $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \wedge \vec{a}$
- $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$

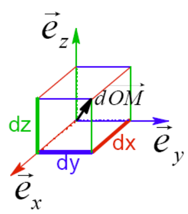
Expression analytique

Soient $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} y_1z_2 - y_2z_1 \\ x_2z_1 - x_1z_2 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$

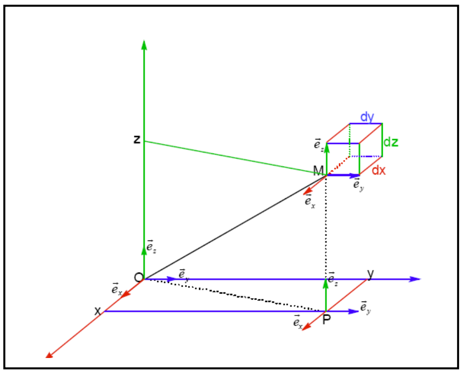
V. Systèmes de coordonnées

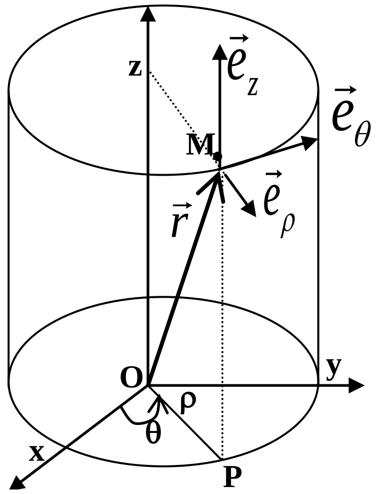
V.1- Coordonnées cartésiennes

Coordonnées : x : abscisse ; y : ordonnée et z : côte



$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = dx\overrightarrow{e_x} + dy\overrightarrow{e_y} + dz\overrightarrow{e_z}}$$





V.2- Coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques du point sont définies par : OP = ρ ≥ 0 et θ est l'angle entre (Ox,OP) avec 0 ≤θ≤2π

Ce système de coordonnées permet de recouvrir tout l'espace une fois et une seule, en respectant les intervalles définis pour ρ et θ. Un triplet de nombres, ρ,θ, z correspond à un point de l'espace et un seul ; cependant la réciproque n'est pas vraie, car pour les points de l'axe Oz (ρ = 0) l'angle θ reste indéterminé.

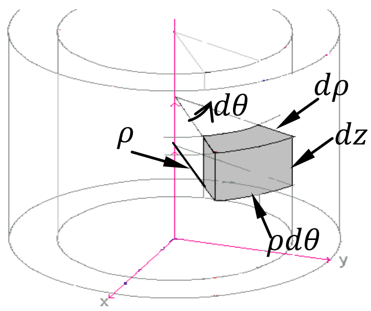
V.2.1- Base locale des coordonnées cylindriques

$\overrightarrow{e_\rho}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire au cylindre d'axe Oz passant par M, indiquant la direction des ρ croissants.

$\vec{k}$ est un vecteur unitaire porté par Oz

$\overrightarrow{e_\theta}$ est un vecteur unitaire normal au plan défini par $\overrightarrow{e_\rho}$ et $\vec{k}$, et tel que $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta}, \vec{k})$ forme un trièdre direct.

V.2.2- Correspondance avec les coordonnées cartésiennes :



$$\begin{pmatrix}\rho\\ \theta\\ z\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} : \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

et à $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}\rho\\ \theta\\ z\end{pmatrix} : \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$ l'élément de surface :$dS = \rho d\rho d\theta$

l'élément de la surface latérale du cylindre : $dS = \rho d\theta dz$

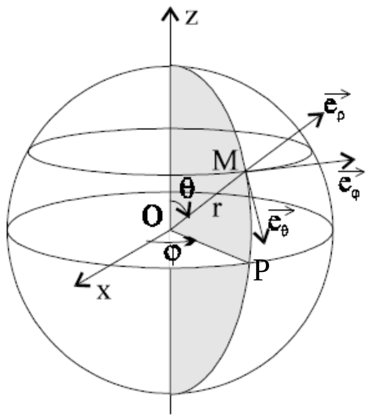
Attention, θ n'est défini qu'à kπ près

Attention, cette dernière équation peut poser des problèmes, la valeur de θ est à <u>moduler en fonction du signe de x et de y.</u>

V.2.3- Cas particulier : coordonnées polaires

Lorsque z = 0, on parle de coordonnées polaires (ρ,θ) dans le plan.

V.3- Coordonnées sphériques



Les coordonnées sphériques du point sont définies par : OM = r ;$(Ox, OP) = \varphi$,OP)avec 0 ≤ φ≤ 2π (Oz,OM) = θ avec 0 ≤ θ ≤ π

Ce système de coordonnées permet de recouvrir tout l'espace une fois et une seule, en respectant les intervalles définis pour r, θetφ. Un triplet de nombres,(r, θ, φ)correspond à un point de l'espace et un seul ; cependant la réciproque n'est pas vraie, car pour les points de l'axe Oz (θ = 0, ou θ = π) l'angle φreste indéterminé.

V.3.1- Base locale des coordonnées sphériques

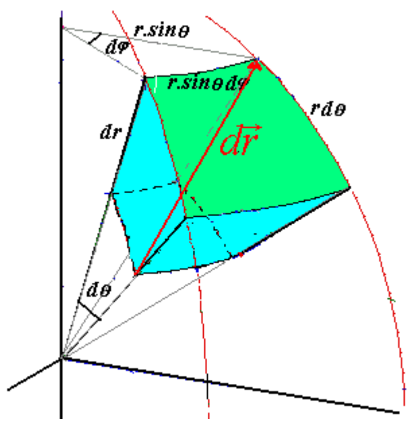
$\overrightarrow{e_r}$est un vecteur unitaire tel que $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$

$\overrightarrow{e_\theta}$est dans le plan méridien de M, directement perpendiculaire à $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ est donc un vecteur tangent au cercle passant par M de centre O, ou méridien passant par M

$\overrightarrow{e_\varphi}$ est un vecteur unitaire tel que le trièdre $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$soit un trièdre direct.

Propriété : $\vec{e}_\varphi$ est un vecteur tangent au cercle passant par M et parallèle au plan (xoy).

V.3.2- Correspondance avec les coordonnées cartésiennes :



$$\begin{pmatrix}r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} : \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\cos\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \text{ et } \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} : \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \cos^{-1}\frac{z}{r} \\ \varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x} \end{cases}$$

L'élément de surface : $dS = (r\sin\theta d\varphi)(rd\theta) = r^2\sin\theta d\theta d\varphi$

L'élément de volume : $dV = dr.(\,r\sin\theta d\varphi)(rd\theta) = r^2\,\mathrm{dr}\sin\theta d\theta d\varphi$

VI. Opérateurs vectoriels

VI.1- Gradient : le gradient d'une fonction $f$est le vecteur :

$$\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

En coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\overrightarrow{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$

En coordonnées sphériques : $\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$

VI.2- Divergence : la divergence d'un vecteur $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$est un scalaire $div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

En coordonnées cylindriques : $div\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

en coordonnées sphériques $div\vec{A} = 1/r^2\,\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$

VI.3- Rotationnel : Le rotationnel d'un vecteur $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ est un vecteur $\overrightarrow{rotA} = \begin{pmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$

En coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{rotA} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{\rho}(A_\theta + \rho\frac{\partial A_\theta}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\theta})\vec{k}$

En coordonnées sphériques : $\overrightarrow{rotA} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi\sin\theta - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right]\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\overrightarrow{e_\varphi}$

VI.4- Laplacien :

Le laplacien d'une fonction f est

En coordonnées cartésiennes : $\Delta f = div(\overrightarrow{grad}f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

En coordonnées cylindriques : $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

En coordonnées sphériques : $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta})$

Chapitre II
Cinématique du point

I.- Généralités

I.1- Définition : La cinématique est la partie de la mécanique qui étudie les mouvements des corps dans leurs rapports avec le temps, indépendamment des causes de ces mouvements (décrire les mouvements des corps sans chercher à les interpréter).

Point matériel : un point matériel est un corps dont la totalité de la masse est concentrée en un point.

I.2- Notion de trajectoire : La succession au cours du temps, des points (des lieux occupés par le point matériel) constitue une courbe appelée trajectoire.

I.3-Repère d'espace : Un repère est un système d'un point et de trois axes permettant de repérer un point matériel. Par exemple le repère cartésien (Oxyz).

I.4- Référentiel : Un référentiel R est un ensemble rigide de points considérés fixes par rapport auquel on se place pour étudier le mouvement d'un point matériel (association d'une horloge et d'un repère).

I.5- Repère du temps : Il est constitué d'un instant d'origine et d'une échelle de temps. Le temps est une notion absolue, c'est-a-dire indépendante du référentiel d'étude : ainsi, deux observateurs lies a des référentiels différents attribuent les mêmes dates aux mêmes événements.

I.6- Position : La position d'un objet est définie comme la donnée, dans un système de référence, d'une ou de plusieurs valeurs numériques : les coordonnées.

I.7- Déplacement : La position dépend du paramètre temps t : $\overrightarrow{OP}(t)$. Le déplacement correspond au changement de position. A l'instant t_1 la position est donnée par le vecteur$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP}(t_1)$, plus tard, à l'instant t_2, la position est donnée par le vecteur $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP}(t_2)$. Il est assez naturel de considérer le déplacement $\overrightarrow{d_{12}}$ comme le vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$.
De même si le point continue à se déplacer on définit les déplacements successifs : $\overrightarrow{d_{23}}, \overrightarrow{d_{34}}, \overrightarrow{d_{45}}$. On peut aussi calculer le déplacement $\overrightarrow{d_{13}}$ entre P_1 et P_3 par exemple.

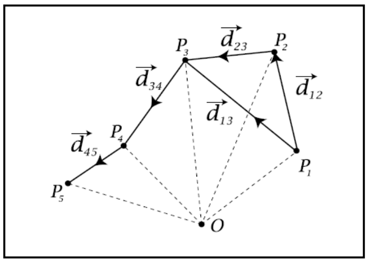


Figure 1

II- Mouvement rectiligne : Le mouvement d'un corps est rectiligne si sa trajectoire est une droite.

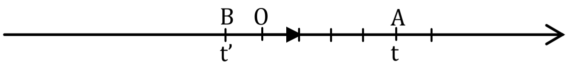


Figure 2

II.1 Position : à un instant t, le mobile se trouve en A d'abscisse x_A=x(t) (le vecteur position $\overrightarrow{OA} = x_A\vec{\imath}$ ($x_A = 4\ dans\ la\ figure\ 2$) et à un instant t', le mobile se trouve en B (x_B=x(t')) le vecteur position$\overrightarrow{OB} = x_B\vec{\imath}$ ($x_B = -1\ dans\ la\ figure\ 2$).

Le déplacement entre A et B est donné par le vecteur $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{\imath}$ (ou$\overrightarrow{\Delta x}$) (sur la figure $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -4\vec{\imath} - 1\vec{\imath} = -5\vec{\imath}$).

II.2- Vitesse

II.2.1- Vitesse moyenne

La vitesse moyenne entre A et B (figure 1) :

$\overrightarrow{v_{moy}} = \frac{\overrightarrow{\Delta x}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\Delta t} = \frac{(x_B - x_A)\vec{\imath}}{\Delta t}$ C'est un vecteur colinéaire au vecteur déplacement.

II.2.2- Vitesse instantanée :

Pour définir la vitesse instantanée, il faut que le point B soit très proche de A (figure) autrement dit la différence de temps doit être très petite (infinitésimale).

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{v_{moy}} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath}$$

Si la vitesse est constante (ne dépend pas du temps), on dit que le mouvement est uniforme.

Si la vitesse est donnée en fonction du temps $v = v(t)$, l'abscisse x peut être déterminée en utilisant la relation :

$v = \frac{dx}{dt} \to dx = vdt \to \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} vdt \to x = x_0 + \int_{t_0}^{t} vdt$

Exemple : Une particule se déplace suivant l'axe des OX telle que sa position est donnée par : $x(t) = 5t^2 + 1$

Calculer la vitesse moyenne dans les intervalles a) 2 s et 3 s b)2s et 2,1s c)2s et 2,0001s d) 2s et 2,00001s

2) Calculer la vitesse instantanée à 2s

II.2.3- Accélération :

L'accélération moyenne entre A (vitesse instantanée est $\vec{v}(t_1)$)et B ($\vec{v}(t_2)$)(voir figure 1) est $\overrightarrow{a_{moy}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$

II.2.4-Accélération instantanée : Donner par la relation $\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{a_{moy}} = \frac{dv}{dt}\vec{\imath} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath}$

Si l'accélération instantanée est donnée en fonction du temps $a(t)$, la vitesse se calcule en intégrant l'accélération:

$$a = \frac{dv}{dt} \to dv = adt \to \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} adt \to v = v_0 + \int_{t_0}^{t} adt$$

Si elle est exprimée en fonction de l'abscisse $a(x)$, on écrit :

$$a = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = adt \rightarrow vdv = vadt = adt\frac{dx}{dt} = adx \rightarrow \int_{v_0}^{v} vdv = \int_{x_0}^{x} adx \rightarrow \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = \int_{x_0}^{x} adx$$

Exemple : On donne $a = 4x - 2 \; et \; v_0 = \frac{10m}{s} \, en \; x_0 = 0$, trouver l'expression de la vitesse.

Remarque : Le mouvement est accéléré si $\vec{v}.\vec{a} > 0$ (la vitesse et l'accélération ont le même sens)(figure 3)

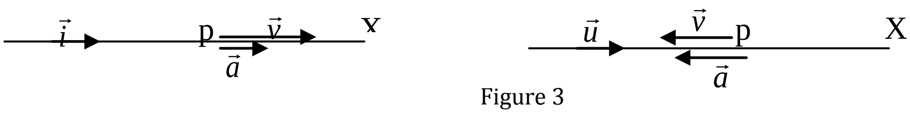


Figure 3

Le mouvement est retardé si $\vec{v}.\vec{a} < 0$ (la vitesse et l'accélération ont des sens opposés)(figure 4)

Figure 4

II.3- Mouvement rectiligne uniforme :

Dans ce cas, la vitesse est constante (ne dépend pas du temps) $v(t) = v_0 = cte$, par conséquent : $a = \frac{dv_0}{dt} = 0$ et $v_0 = \frac{dx}{dt}$. En intégrant : $\int_{t_0}^{t} v_0 dt = \int_{x_0}^{x} dx \rightarrow x(t) = x_0 + v_0(t - t_0)$

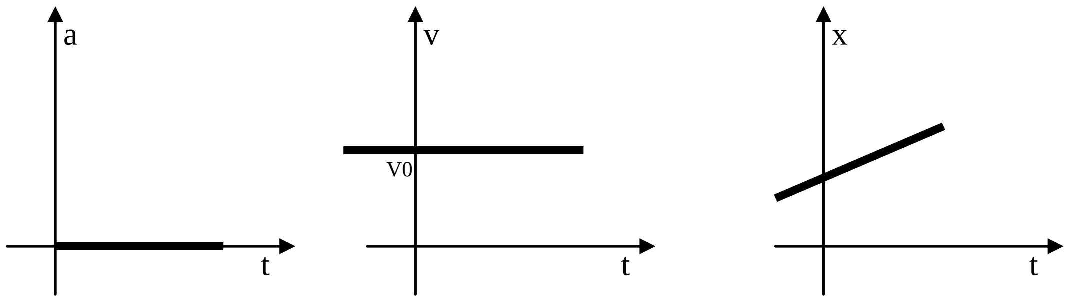


Figure 5 : diagrammes $a(t), v(t) et \; x(t)$ dans le cas d'un mouvement rectiligne uniforme

II.4- Le mouvement rectiligne uniformément accéléré :

Dans ce cas, l'accélération est constante $(a(t) = a_0 > 0)$ par conséquent :

- $\boldsymbol{\frac{dv}{dt} = a_0 \rightarrow \int_{t_0}^{t} a_0 dt = \int_{v_0}^{v} dv \rightarrow v(t) = v_0 + a_0(t - t_0) avec \; v_0 = v(t_0)}$ **(2)**
- $\boldsymbol{v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 + a_0(t - t_0) \rightarrow \int_{x_0}^{x} dx =}$
  $\boldsymbol{\int_{t_0}^{t} v_0 dt + \int_{t_0}^{t} a_0(t - t_0)dt}$ $\rightarrow$ ***ce qui donne*** $\boldsymbol{x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2}$ **(3)**

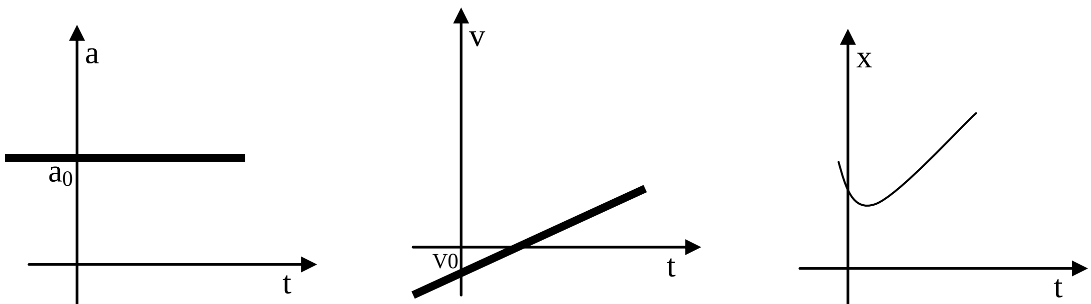


Figure 6 : diagrammes $a(t), v(t) et \; x(t)$ dans le cas d'un mouvement rectiligne uniforme accéléré

De (2), on tire $t - t_0 = \frac{v - v_0}{a_0}$ (4)

On injecte (4) dans (3) : $\boldsymbol{x(t) - x_0 = v_0 \frac{v - v_0}{a_0} + \frac{1}{2}a_0 \left(\frac{v - v_0}{a_0}\right)^2 = \frac{1}{2a}\left(v(t)^2 - v_0^2\right) \; ou \; bien \; v(t)^2 - v_0^2 = 2a(x(t) - x_0)}$

Exemple :

Un corps mobile M quitte un point O avec une vitesse initiale de 10 m/s et une accélération -2m/s², suivant un même axe.

a) Trouver les expressions de la vitesse et de la position de M aux temps ultérieurs.
b) Quelle est la position extrême de M dans la direction positive ? A quel instant l'atteint-il ?
c) Quand M repasse t-il par O ?

III. Mouvement dans l'espace

II.3.1- Repérage du mobile

Dans le cas d'une trajectoire quelconque dans l'espace A trois dimensions, la position est directement déterminée par son vecteur position $\vec{r}(t)$ à chaque instant t.

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$$

On parle alors de mouvement curviligne (mouvement dans l'espace).

A un instant t', le mobile est en M' avec :

$$\vec{r'} = \vec{r}(t') = \overrightarrow{OM'}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r'} - \vec{r} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{MM'}$$

Entre les instant t et t' la particule a parcourue **l'arc** $MM' = \Delta s$

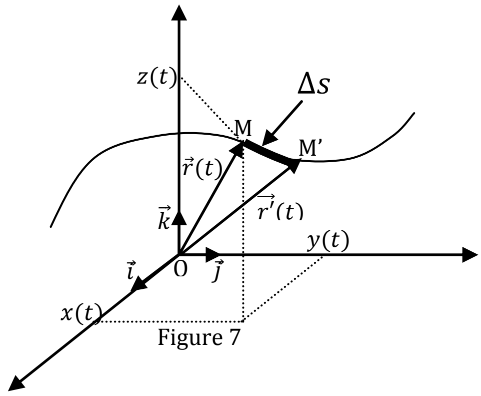


Figure 7

II.3.2- Vitesse moyenne :

La vitesse moyenne $\overrightarrow{v_{moy}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$

La vitesse moyenne est représentée par un vecteur parallèle au déplacement. (figure 8)

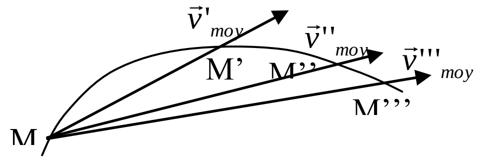


Figure 8

II.3.3- Vitesse instantanée :

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \lim_{\Delta t\to 0} \overrightarrow{\boldsymbol{v_{moy}}} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{r}}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t}+\Delta\boldsymbol{t}) - \vec{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})}{\Delta \boldsymbol{t}} = \frac{\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\boldsymbol{dt}}$$

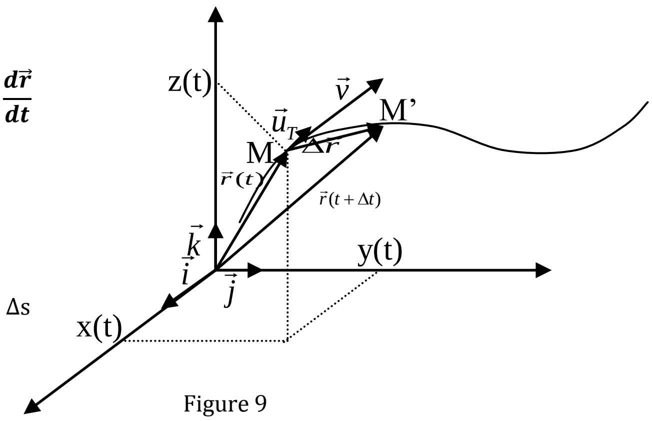
C'est la dérivée du vecteur position par rapport au temps.

En coordonnées cartésiennes, le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}$$

Le module du vecteur vitesse est $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

Lorsque la particule se déplace de M en M', le déplacement Δs suivant la courbe est donnée par la longueur de l'arc MM'.



$$\vec{\boldsymbol{v}} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \lim_{\Delta s\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \boldsymbol{v}\overrightarrow{\boldsymbol{u_T}}$$

Figure 9

<u>$\overrightarrow{u_T}$ est un vecteur unitaire tangent à la trajectoire</u>. La vitesse instantanée est donc un vecteur tangent à la trajectoire de module égal à $\frac{ds}{dt}$.

II.3.4- L'accélération instantanée

La vitesse dans un mouvement curviligne change à la fois de grandeur et de direction.

L'accélération moyenne dans l'intervalle de temps Δt est le vecteur : $\overrightarrow{a_{moy}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

L'accélération instantanée : $\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0} \overrightarrow{a_{moy}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

L'accélération est toujours dirigée vers la **concavité de la courbe**. Les composantes du vecteur accélération en coordonnées cartésiennes sont :

$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, $a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$ et $a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$ et le module du vecteur accélération est : $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

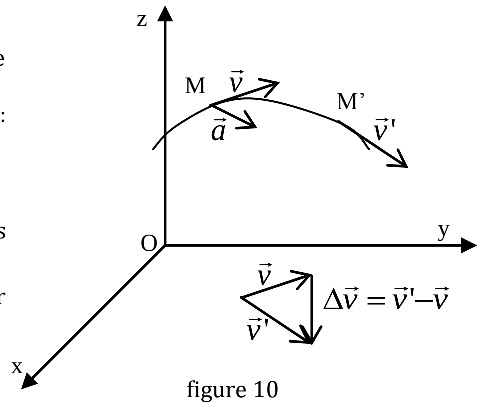


figure 10

Si l'accélération du point matériel est donnée en fonction du temps $\vec{a}(t)$ l'expression du vecteur vitesse peut être déduite à partir de la relation :

$\vec{v} = \overrightarrow{v_0} + \int_{t_0}^{t} \vec{a}dt$ et la position par $\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \int_{t_0}^{t} \vec{v}dt$

II.3.4- Composantes normales et tangentielles de l'accélération

On peut décomposer l'accélération en une composante **tangentielle** qui indique le changement du **module** de la vitesse et une composante **normale** qui indique le changement de **direction** de la vitesse.

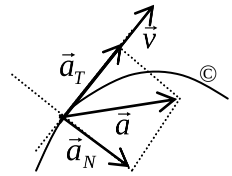


Figure 11

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\overrightarrow{u_T})}{dt} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_T} + v\frac{d\overrightarrow{u_T}}{dt} \qquad \textbf{(1)}$$

Si la trajectoire est une droite (direction fixe), $\frac{d\overrightarrow{u_T}}{dt} = \vec{0}$.

Comme la direction de $\overrightarrow{u_T}$ varie le long de la courbe, la dérivée de ce dernier n'est pas nulle ($\frac{d\overrightarrow{u_T}}{dt} \neq \vec{0}$).

Soit $\overrightarrow{u_N}$ un vecteur unitaire perpendiculaire à $\overrightarrow{u_T}$ et dirigé vers la concavité de la courbe (de la trajectoire).

Les vecteurs $\overrightarrow{u_T}$ et $\overrightarrow{u_N}$ forment une base orthonormée appelée base de Frenet (ou base intrinsèque). C'est une base mobile qui suit le point matériel dans son mouvement :la direction de chacun des deux vecteurs change à chaque instant, sauf dans le cas d'un mouvement rectiligne.

$\overrightarrow{u_T} = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{u_N} = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}$

$\frac{d\overrightarrow{u_T}}{dt} = (-\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath})\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{u_N}$ (voir exercice 6 série 1).

D'autre part, $\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\theta}{ds}$ (avec $ds = \widehat{MM'}$)

Or d'après la figure 12 :$\tan\theta \approx d\theta = \frac{ds}{R} \Rightarrow \frac{ds}{d\theta} = \frac{1}{R}$

Donc $\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R}$

et par conséquent $\frac{d\overrightarrow{u_T}}{dt} = \frac{v}{R}\overrightarrow{u_N}$

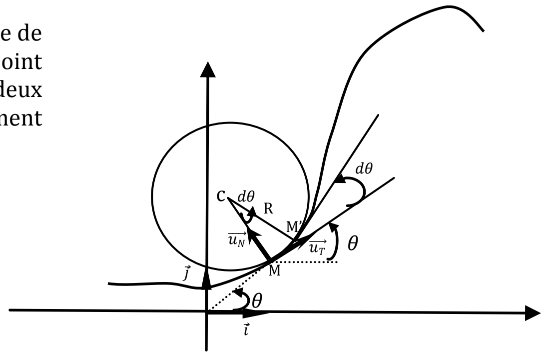


figure 12

Finalement la relation (1) s'écrit : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\overrightarrow{u_T})}{dt} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_T} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_N}$ (composante tangentielle plus composante normale).

$\overrightarrow{a_T} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_T}$ et $\overrightarrow{a_N} = \frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_N}$ avec $v = \|\vec{v}\|$

On peut écrire donc : $\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k} = \overrightarrow{a_T} + \overrightarrow{a_N} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_T} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_N}$

Et $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}}$

Si le mouvement est curviligne uniforme (vitesse constante en module), l'accélération tangentielle est nulle. D'autre part si le mouvement est rectiligne (rayon infini) l'accélération normale est nulle (pas de changement de direction de la vitesse).

II.4- Mouvement circulaire

La vitesse est tangente au cercle. Elle est perpendiculaire en chaque point du cercle à la droite joignant ce point et le centre du cercle. L'abscisse curviligne est donnée par la relation : $S = R\theta$ La vitesse linéaire $v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$

La quantité $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ est appelée vitesse angulaire (en rad/s).

Alors la vitesse linéaire $v = \omega R$

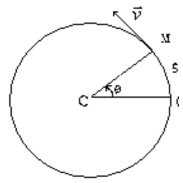


Figure 13

De la figure de ci-contre (Figure 14), on peut remarquer que :

$R = r\sin\gamma$ et $v = r\omega\sin\gamma$.

Ce qui s'écrit : $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$.

Pour un mouvement circulaire uniforme (vitesse angulaire constante), le mouvement est périodique de période T : temps nécessaire pour faire un tour complet. Dans ce cas on peut écrire : $\omega = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t}\omega dt \rightarrow \theta = \theta_0 + \omega(t - t_0)$.

Si $\theta_0 = 0$ pour $t_0 = 0$, on a $\omega = \frac{\theta}{t}$

Pour un tour complet $t = T\ et\ \theta = 2\pi$ donc $\omega = \frac{2\pi}{T}$

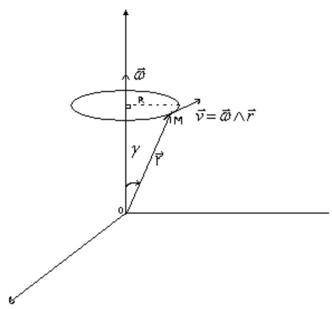


Figure 14

II.4.1- Accélération angulaire

Lorsque la vitesse angulaire d'un point matériel varie au cours du temps, l'accélération angulaire $\vec{\alpha}$ est donnée par : $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

L'accélération tangentielle est donnée par la relation $\overrightarrow{a_T} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_T} = \frac{d(R\omega)}{dt}\overrightarrow{u_T} = R\frac{d\vec{\omega}}{dt} = R\vec{\alpha}$

L'accélération normale $\overrightarrow{a_T} = \frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_N} = R\omega^2\overrightarrow{u_N}$.

Pour un mouvement circulaire uniforme $\overrightarrow{a_T} = 0$

Dans ce cas $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$ et donc $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{v} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{v})$

II.5- Etude du mouvement dans les différents systèmes de coordonnées

II.5.1- Etude du mouvement en coordonnées cylindriques

Vecteur position : $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} + z\vec{k}$

Déplacement élémentaire (voir chapitre I) : $d\vec{r} = d\rho\overrightarrow{e_\rho} + \rho d\theta\overrightarrow{e_\theta} + dz\vec{k}$

Surface élémentaire (voir chapitre I) :

- Surface latérale : $dS = \rho d\theta dz$
- Surface du disque : $dS = \rho d\rho d\theta$

Attention ! Ces notions sont très importantes en électrostatique.

La vitesse :

$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\rho\overrightarrow{e_\rho} + z\vec{k}\right) = \frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$

$$\vec{v} = \dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\vec{k}$$

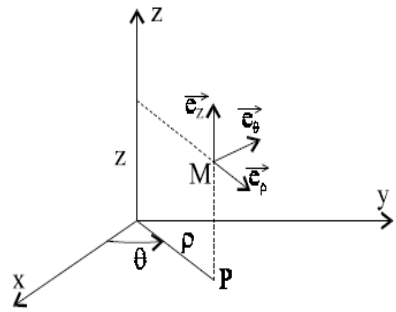


Figure 14

Accélération : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\vec{k}\right)$

$$\vec{a} = \frac{d\dot{\rho}}{dt}\overrightarrow{e_\rho} + \dot{\rho}\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \rho\frac{d\dot{\theta}}{dt}\overrightarrow{e_\theta} + \rho\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} + \frac{d\dot{z}}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{e_\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\overrightarrow{e_\theta}$$

II.5.2- Etude du mouvement en coordonnées sphériques

Position : $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$

Déplacement élémentaire : $d\vec{r} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta} + (r\sin\varphi\, d\theta)\overrightarrow{e_\varphi}$

Surface élémentaire : Voir Chapitre I

La vitesse : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{e_r} + r\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}$

Or $\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\,\vec{k} + \sin\theta\,\vec{u}$

$\overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\,\vec{k} + \cos\theta\,\vec{u}$

$\overrightarrow{e_\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}$

Avec $\vec{u} = \cos\varphi\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}$ **(Voir exercice 7 de la série 1)**

$$\frac{d\vec{u}}{d\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath} = \overrightarrow{e_\varphi}$$

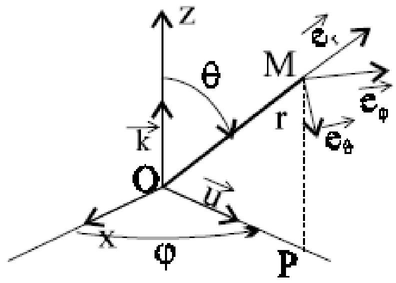


Figure 15

Comme : $\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\,\vec{k} + \frac{d\theta}{dt}\cos\theta\,\vec{u} + \sin\theta\frac{d\vec{u}}{dt}$

Et $\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{u}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$

Alors : $\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(-\sin\theta\,\vec{k} + \cos\theta\,\vec{u}) + \sin\theta\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \sin\theta\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$

Ce qui donne $\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\dot{\varphi}\sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}$

Accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\dot{\varphi}\sin\theta\overrightarrow{e_\varphi})$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\overrightarrow{e_r} + \dot{r}\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} + \dot{r}\dot{\varphi}sin\theta\ \overrightarrow{e_\varphi} + r\ddot{\varphi}sin\theta\ \overrightarrow{e_\varphi} + r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\ \overrightarrow{e_\varphi} + r\dot{\varphi}sin\theta\ \frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{k} - \dot{\theta}\sin\theta\,\vec{u} + \cos\theta\frac{d\vec{u}}{dt} = -\dot{\theta}\left(\cos\theta\,\vec{k} + \sin\theta\,\vec{u}\right) + \dot{\varphi}\cos\theta\,\overrightarrow{e_\varphi} = -\dot{\theta}\overrightarrow{e_r} + \dot{\varphi}\cos\theta\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{u} = -\dot{\varphi}(\cos\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_r})$$

Finalement l'expression de l'accélération en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\boldsymbol{\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right)\overrightarrow{e_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\overrightarrow{e_\theta} + (2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta)\overrightarrow{e_\varphi}}$$

II.6- Vecteur rotation :

II.6.1- Définition :

Le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{\overrightarrow{OM}/R}$ ou vecteur vitesse de rotation instantanée du vecteur $\overrightarrow{OM}$ par rapport au repère R est le vecteur défini par :

- Sa direction est portée par l'axe de rotation instantanée de $\overrightarrow{OM}$ par rapport à R.
- Sa norme (module) est proportionnelle à la vitesse angulaire de $\overrightarrow{OM}$ par rapport à R :

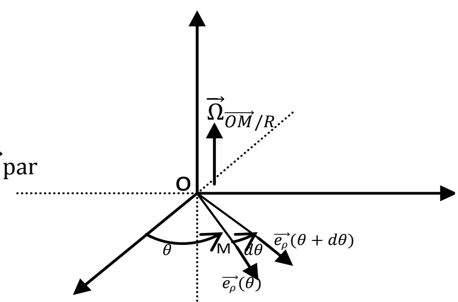


Figure 16

- Dans le cas d'une rotation autour de l'axe OZ: $\vec{\Omega}_{\overrightarrow{OM}/R} = \dot{\theta}\vec{k}$ et $\vec{\Omega}_{\overrightarrow{OM}/R} \wedge \vec{e_\rho} = \frac{d\vec{e_\rho}}{dt}$

Nous pouvons généraliser ce résultat pour tout vecteur unitaire lié à M.

II.7-Mouvements relatifs

II.7.1- Changement de référentiel

Supposons que la vitesse et l'accélération d'un point mobile M sont connues par rapport à un référentiel donné. On veut déterminer la vitesse et l'accélération par rapport à un autre référentiel.

Exemple (voir figure 17)

Intéressons nous au mouvement d'un point de la roue par rapport :

- A la roue : Référentiel R_2 (repère $O_2X_2Y_2$)
- A la voiture : Référentiel R_1 (repère $O_1X_1Y_1$)
- Au sol : Référentiel R_0 (repère $O_0X_0Y_0$)

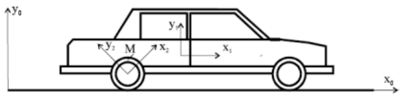
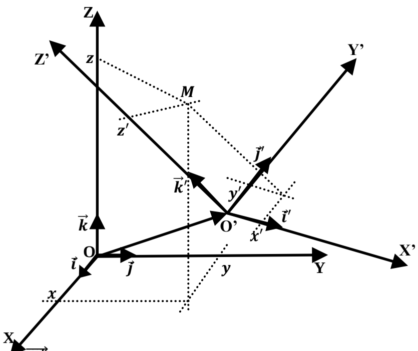


Figure 17

Nous remarquons que M est :

- Fixe par rapport à la roue. Référentiel R_2
- Décrit un cercle par rapport au véhicule. Référentiel R_1
- Par rapport au sol le point M décrit un cycloïde.

Soit un point matériel M observé par rapport à un référentiel R (repère Oxyz muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$+ le temps). On dira que ce référentiel permet d'observer le mouvement absolu du mobile (R est le référentiel absolu). Les vecteurs $\vec{i}, \vec{j} et\ \vec{k}$ sont **fixes**.



Soit un second référentiel R' (repère o'x'y'z' muni de la base $(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$. R' est appelé référentiel relatif, en mouvement quelconque par rapport au repère absolu R. les vecteurs $\vec{i'}, \vec{j'} et\ \vec{k'}$ ne sont pas fixes.

Nous pouvons écrire :

	Dans (Oxyz)	**Dans (O'x'y'z')**
La position	$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$	$\overrightarrow{O'M} = x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}$
La vitesse	$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = \vec{v_a} = \vec{v}_{M/R}$	$\vec{v'} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \dot{x}'\vec{i'} + \dot{y}'\vec{j'} + \dot{z}'\vec{k'} = \vec{v_r} = \vec{v}_{M/R'}$
L'accélération	$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} = \vec{a_a} = \vec{a}_{M/R'}$	$\vec{a'} = \ddot{x}'\vec{i'} + \ddot{y}'\vec{j'} + \ddot{z}'\vec{k'} = \vec{a_r} = \vec{a}_{M/R'}$

Pour un observateur du référentiel R, le mouvement de R' est connu par l'intermédiaire du mouvement de O' par rapport à O ($\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$) et de la façon dont les axes de O'X', O'Y' et O'Z' tournent autour de O' soit ($\frac{d\vec{i'}}{dt}, \frac{d\vec{j'}}{dt}, \frac{d\vec{k'}}{dt}$).

II.7.2- Relation entre les positions :

Nous remarquons que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

D'une manière explicite on écrit : $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x_0'\vec{i} + y_0'\vec{j} + z_0'\vec{k}) + (x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'})$

II.7.3- Relation entre les vitesses :

$$\vec{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}\right) = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

$$\vec{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d}{dt}\left(x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}\right) = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{dx'}{dt}\vec{i'} + x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}$$

$$\vec{v_a} = \left[\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right] + \left(\frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}\right) = (\vec{v}_{O/R} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}) + \vec{v}_{M/R'}$$

Soit $\boldsymbol{\vec{v_a} = \vec{v_e} + \vec{v_r}}$

$\vec{v}_r = \vec{v}_{M/R}$ est la vitesse relative (vitesse de M dans R').

$\vec{v}_e = \vec{v}_{R'/R}$ est la vitesse d'entrainement de R' par rapport à R. elle peut être considérée comme la vitesse absolue qu'aurait M dans R si ces coordonnées dans R' étaient constantes. Autrement dit, cette vitesse est nulle si R et R' sont fixes l'un par rapport à l'autre. Dans ce cas les deux observateurs mesurent la même vitesse.

Si R' est en mouvement de translation uniforme (**pas de rotation**) par rapport au référentiel R, les vecteurs $\vec{i'}, \vec{j'} et\ \vec{k'}$ ne tournent pas (constants), la vitesse d'entrainement est indépendante du point M : $\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$

II.7.4- Relation entre les accélérations

$$\vec{a_a} = \frac{d\vec{v_a}}{dt} = \left(\ddot{x}'\vec{i'} + \ddot{y}'\vec{j'} + \ddot{z}'\vec{k'}\right) + \left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2}\right) + 2\left(\dot{x}'\frac{d\vec{i'}}{dt} + \dot{y}'\frac{d\vec{j'}}{dt} + \dot{z}'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)$$

Cette formule peut être réécrite sous la forme plus simple : $\vec{a_a} = \vec{a_r} + \vec{a_e} + \vec{a_c}$

Avec $\vec{a_r}$ accélération relative, $\vec{a_e}$ accélération d'entraînement (c'est l'accélération qu'aurait M dans le repère absolu s'il était immobile par rapport à R') et $\vec{a_c}$ accélération de Coriolis. Cette dernière s'annule si :

- Le mobile est fixe par rapport à R'
- R'est en mouvement de translation par rapport à R.

Lorsque R' est en mouvement de translation uniforme par rapport à R on a l'accélération absolue est égale à l'accélération relative. Donc les deux observateurs mesurent la même accélération.

Chapitre III
Dynamique du point

I- Introduction
I.1- Définition
La dynamique est l'étude de la relation entre le mouvement d'un corps et les causes qui le produisent. Donc on peut dire que le mouvement est un résultat direct de l'interaction d'un corps avec les objets qui l'entourent.

Exemple

La trajectoire d'un projectile n'est autre que le résultat de son interaction avec le Terre. Les interactions entre les corps sont décrites d'une manière convenable par une notion mathématique appelée **force.** *La dynamique peut être définie donc comme une relation qui existe entre les forces et les variations du mouvement.*

II- Principe d'inertie (première loi de Newton)
II.1- Particule libre
Une particule libre est celle qui n'est soumise à aucune interaction. Une telle particule n'existe pas réellement. Pour qu'elle existe elle doit être complètement isolée, soit la seule au monde, et donc impossible de l'observer (l'observateur perturbe la mesure par sa présence). Néanmoins, on peut supposer (avec une bonne approximation) qu'une particule suffisamment éloignée des autres particules ou si la résultante de son interaction avec les autres particules est nulle comme une particule isolée.

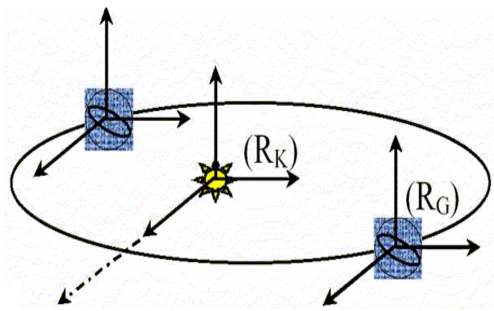
II.2- Enoncé du principe d'inertie
Une particule libre se déplace toujours avec une vitesse constante. Autrement dit, la particule isolée soit elle se déplace sur une ligne droite avec une vitesse constante, soit elle est immobile.

Comme le mouvement est une notion relative (des observateurs dans des référentiels différents n'observent pas le même mouvement). A qui ou à quoi est rapporté le mouvement de la particule libre dans le principe d'inertie ?

II.3- Référentiels galiléens
C'est un référentiel dans lequel le principe d'inertie est valable. Dans ce référentiel, le mouvement d'une particule isolée est rectiligne et uniforme.

- Tout système se déplaçant à vitesse constante par rapport à un référentiel d'inertie est également un référentiel d'inertie. Si l'accélération d'une particule est nulle dans un référentiel d'inertie elle est nulle dans tous les autres référentiels d'inertie.

II.3.1- Exemple de référentiels d'inertie

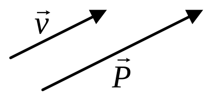


- *Référentiel héliocentrique de Kepler (R_K):*
  - Origine : centre de masse du soleil.
  - Axes dirigés vers étoiles fixes.
- *Référentiel de Copernic*
  - origine : centre de masse du système solaire
  - Axes dirigés vers trois étoiles fixes
- *Référentiel géocentrique (R_G)*
  - origine centre de masse de la Terre
  - Axes dirigés vers trois étoiles fixes

Ce référentiel est surtout utilisé pour l'étude du mouvement des satellites.

- *Référentiel Terrestre ou du laboratoire*
  - Origine : un point de la surface de la terre.
  - Axes perpendiculaires deux à deux.

III- La quantité de mouvement



Plus la masse d'une particule est importante, plus il est difficile de modifier son vecteur vitesse (un camion chargé en mouvement est plus difficile à arrêter ou à accélérer qu'un camion vide ayant la même vitesse).

La masse caractérise l'inertie d'un corps : résistance que le corps oppose à tout changement provoqué de vitesse (elle n'intervenait pas en cinématique).

La quantité de mouvement d'une particule est le produit de sa masse par sa vitesse $\vec{P} = m\vec{v}$

La notion de quantité de mouvement est très importante en physique car elle combine les éléments qui caractérisent l'état dynamique d'une particule : sa masse et sa vitesse.

Le principe d'inertie peut s'énoncé : *une particule libre se déplace avec une quantité de mouvement constante dans un référentiel d'inertie.*

III.1- Conservation de la quantité de mouvement :
Soient deux particules M1 et M2 de masses m_1 et m_2 respectivement **isolées** du monde. Elles ne sont soumises qu'à leur interaction mutuelle. Leurs vitesses individuelles ne sont donc pas constantes et leurs trajectoires sont généralement courbées.

A l'instant t, la particule M1 se trouve en un point A et animée d'une vitesse $\vec{v}_1$. La particule M2 se trouve en un point B avec une vitesse $\vec{v}_2$. A un instant t' la particule M1 est en A' animée d'une vitesse $\overrightarrow{v'}_1$et la particule M2 se trouve en B' avec une vitesse$\overrightarrow{v'}_2$.

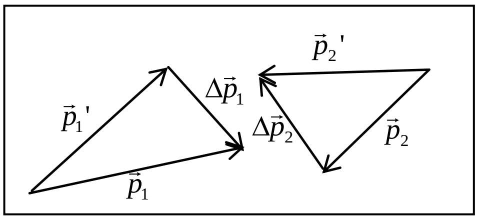
La quantité de mouvement totale du système à l'instant t est $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$

A un instant t' : $\overrightarrow{P'} = \overrightarrow{P'}_1 + \overrightarrow{P'}_2 = m_1\overrightarrow{v'}_1 + m_2\overrightarrow{v'}_2$

A tout instant : $\vec{P} = \vec{P}'$ la quantité de mouvement totale des deux particules est conservée.
D'une manière générale, nous pouvons écrire le principe de conservation de la quantité de mouvement : *la quantité de mouvement totale d'un **système isolé** de particules est constante.*

$$\vec{P} = \sum_i \vec{P}_i = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \ldots + \vec{P}_n = Cte$$

Exemple :
Molécule isolée d'hydrogène : la variation de la quantité de mouvement d'un électron est égale et opposée à la somme des variations des quantités de mouvement de l'autre électron et des deux protons.
Cas de deux particules isolées.



$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = Cte \Rightarrow \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P'}_1 + \vec{P'}_2 \Rightarrow \vec{P'}_1 - \vec{P}_1 = \vec{P'}_2 - \vec{P}_2 \Rightarrow \Delta\vec{P}_1 = -\Delta\vec{P}_2$

Une interaction produit un échange de quantité de mouvement : la quantité de mouvement « *perdue* » par une particule en interaction est égale à la quantité de mouvement « *gagnée* » par l'autre particule.
Remarque :
La loi d'inertie est un cas particulier du principe de conservation de la quantité de mouvement.
$\vec{P} = Cte \Rightarrow m\vec{v} = Cte \Rightarrow \vec{v} = Cte$

IV- Deuxième et troisième loi de Newton
IV.1- Notion de force
Dans de nombreux cas nous nous observons que le mouvement d'une seule particule. Cette particule interagit avec un système d'autres particules. L'action de toutes les autres particules sur la particule en mouvement est décrit par la notion de « force » appliquée par le reste du système sur cette particule.

- Nous définissons la *force moyenne* à laquelle est soumise la particule pendant un intervalle de temps Δt par :$\vec{F}_m = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$
- Nous appelons *force instantanée* appliquée à la particule la dérivée par rapport au temps de sa quantité de mouvement :$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

La force est une notion mathématique : les mots appliquée ou agissant sur ne signifient nullement que quelque chose est réellement appliqué sur la particule.
On distingue les forces suivantes :

- Force d'interaction à distance comme les forces de gravitation, les forces électromagnétique, les forces nucléaires de cohésion.
- Forces de contact comme les forces de frottement et de tension.

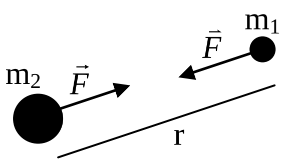
IV.2- Deuxième loi de Newton
Si la masse est une constante : $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$
Lorsqu'un particule de masse m constante possède une accélération $\vec{a}$, nous dirons qu'elle est soumise à une force $\vec{F} = m\vec{a}$

IV.3- Troisième loi de Newton
Le principe de la conservation de la quantité de mouvement pouvait s'écrire pendant un intervalle de temps Δt : $\Delta\vec{P}_1 = -\Delta\vec{P}_2$
Il en résulte que : $\frac{\Delta\vec{P}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta\vec{P}_2}{\Delta t}$ Ou bien : $\frac{d\vec{P}_1}{dt} = -\frac{d\vec{P}_2}{dt}$ et donc : $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$
La force appliquée par la particule 2 sur la particule 1 est égale et opposée à la force appliquée par la particule 1 sur la particule 2 : c'est la principe de l'action et de la réaction.

- Si la particule 1 est en interaction avec d'autres particules d'un système isolé comportant n particules :
$\frac{d\vec{P}_1}{dt} = -(\frac{d\vec{P}_2}{dt} + \frac{d\vec{P}_3}{dt} + \cdots + \frac{d\vec{P}_n}{dt})$

V- Application des lois de Newton
V.1- Loi de gravitation universelle
Entre deux particules matérielles de masses m_1 et m_2 placées à une distance r l'une de l'autre, s'exerce une force attractive :
$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\ avec\ G = 6.67.10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ est la constante de gravitation universelle.
Exemple 1 : loi de Kepler

$$\boldsymbol{\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}}$$



T_1 et T_2 sont les périodes de révolution des planètes de masses m_1 et m_2 respectivement.
r_1 et r_2 sont les rayons des orbites (supposées circulaires) des deux planètes.
L'accélération dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme est donnée par :
$\boldsymbol{a = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}}$ et par conséquent la force $\boldsymbol{F = m\frac{4\pi^2 r}{T^2}}$
Selon la loi de gravitation universelle et en considérant l'interaction de chacune des planètes avec le soleil on peut écrire :
$\boldsymbol{G\frac{m_s m_1}{r_1^2} = m_1\frac{4\pi^2 r_1}{T_1^2}}$ **et** $\boldsymbol{G\frac{m_s m_2}{r_2^2} = m_2\frac{4\pi^2 r_2}{T_2^2}}$
En divisant ces deux dernières égalités l'une sur l'autre on a : $\boldsymbol{\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}}$

Exemple 2 : satellite géostationnaire

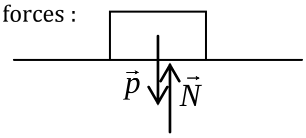
On considère un référentiel attaché au centre de la terre mais ne tournant pas avec elle (référentiel d'inertie). Un satellite géostationnaire (de masse m) décrit une orbite circulaire de rayon r et doit effectuer une rotation en 24 heures.
La force qui le maintient sur son orbite est son poids : $P = \boldsymbol{G}\frac{\boldsymbol{m_T m}}{\boldsymbol{r^2}}$

La force centripète à laquelle est soumis le satellite est : $P = ma = m\omega^2 r = m\frac{v^2}{r}$ $avec\ \omega = 2\pi/T$.

$$\boldsymbol{P = F \Leftrightarrow G\frac{m_T m}{r^2} = m\frac{4\pi^2 r}{T^2} \Rightarrow r = \left(\frac{Gm_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}}$$

Le satellite doit être placé sur une orbite de rayon $\boldsymbol{r} = \left(\frac{\boldsymbol{Gm_T T^2}}{\boldsymbol{4\pi^2}}\right)^{\boldsymbol{1/3}}$ et lancé avec une vitesse initiale de $\boldsymbol{v} = \left(\frac{\boldsymbol{Gm_T}}{\boldsymbol{r}}\right)^{\boldsymbol{1/2}}$

V.2- Force de contact
Forces qui s'exercent entre deux corps en contact l'un avec l'autre.
Exemple 1
Une brique en équilibre sur un sol horizontal. L'accélération $\vec{a} = \vec{0}$. La brique est soumise aux deux forces :

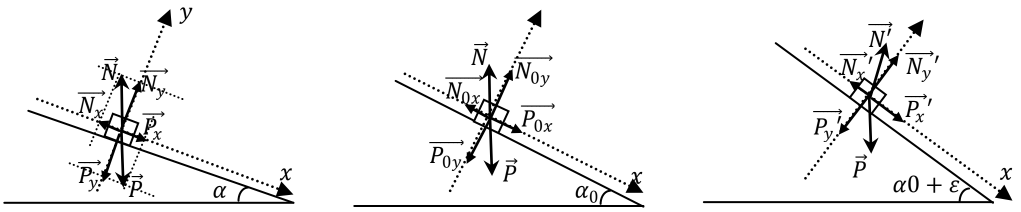


- Son poids : **<u>force à distance</u>** que les molécules de la terre appliquent sur la brique.
- $\vec{N}$: force globale que les **<u>molécules du sol en contact</u>** avec la brique appliquent sur celle-ci.

Remarque :
$\vec{N}$ Représente la réaction du sol. Le principe de l'action et de la réaction s'écrit $\overrightarrow{N'} = -\vec{N}$
$\overrightarrow{N'}$ Force de **contact** que les molécules de la brique en contact avec le sol exercent sur celui-ci.
<u>L'action n'est pas le poids de la brique.</u> Le principe de l'action et de la réaction ne s'applique qu'entre deux forces de <u>même nature physique</u>.
A $\vec{N} \to \overrightarrow{N'}$ et à $\vec{P} \to \overrightarrow{P'}$

$\vec{P}$: force que toutes les molécules de la terre appliquent sur toutes les molécules de la brique.
$\overrightarrow{P'}$: force que toutes les molécules de la brique appliquent sur celles de la terre.

V.3- Les frottements :

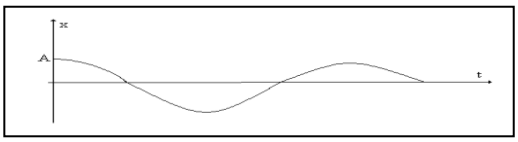


Equilibre **équilibre limite** **Mouvement**

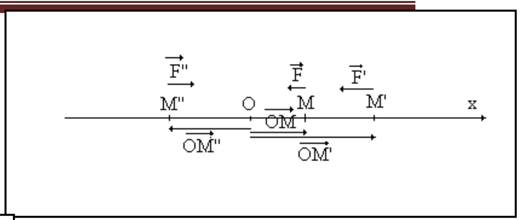
Pour toutes une série de valeurs de α inférieur à une certaine valeur limite α_0 qui correspond au début du glissement, la brique reste immobile. On peut écrire alors : $\vec{P} + \vec{N} = \vec{0}$.
En faisant les projections : $\vec{P} = P_x\vec{\imath} + P_y\vec{\jmath}$ avec $P_x = mgsin\alpha$ et $P_y = mgcos\alpha$
De la même façon : $\vec{N} = N_x\vec{\imath} + N_y\vec{\jmath}$
Lorsque α augmente la composante P_x augmente (car $sin\alpha$ augmente). La nature des surfaces en contact permet à la force de liaison $\vec{N}$ de « s'adapter » de façon à maintenir l'équilibre.
Le coefficient de frottement statique par $\mu_S = \frac{\|\overrightarrow{N_{0x}}\|}{\|\overrightarrow{N_{0y}}\|} = \tan\alpha_0$. α_0 est appelé angle de frottement. La force de frottement statique maximale est $\vec{f}_{smax} = \mu_S\overrightarrow{N_{0y}} = \mu_S mgcos\alpha_0$
En faisant croître α d'une très petite quantité au-delà de α_0, la brique se met à glisser. Son mouvement est uniformément accéléré. Nous avons à <u>l'équilibre limite</u> $N_{0x} = mgsin\alpha_0$ et en cas du mouvement $-N'_x + mgsin\alpha_0 = ma > 0$
Alors on peut déduire que $N_{0x} > N'_x$
Le rapport $\frac{\|\vec{N}'_x\|}{\|\vec{N}'_y\|}$ est pratiquement constant au cours du mouvement il représente le coefficient de glissement cinétique (dynamique) $\mu_C = \frac{\|\vec{N}'_x\|}{\|\vec{N}'_y\|}$.La force de frottement cinétique est $\vec{f_c} = \mu_c\vec{N}'_y = \mu_c mgcos\alpha$

V.3.1- Résistance de l'air
Si un objet est en chute libre dans l'air, au bout d'un certain temps, sa vitesse devient constante et à son poids s'oppose une force appelée *résistance de l'air* $\vec{f} = -k\vec{v}$ avec k une constante déterminée expérimentalement.

V.4- Force élastique
L'un des plus importants mouvements oscillatoires est le mouvement oscillatoire sinusoïdal dans la mesure où il représente beaucoup de phénomènes réels oscillatoires.
$x = Acos\omega t$ $(\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath})$; $\vec{v} = -\omega Asin\omega t\vec{\imath}$ et $\vec{a} = -\omega^2 Acos\omega t\vec{\imath} = -\omega^2\overrightarrow{OM}$

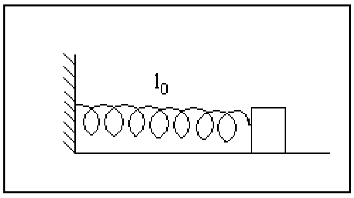


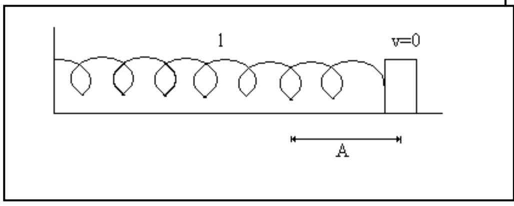
La relation fondamentale de la dynamique donne $\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2\overrightarrow{OM} = -k\overrightarrow{OM}$
Soit en projection : $F_x = -kx$
Dans un mouvement sinusoidal, la force est Proportionnelle au déplacement $\vec{r}$ mesurée par rapport à l'origine et lui est opposée ; elle est toujours dirigée vers l'origine O et ne s'annule que pour cette position.

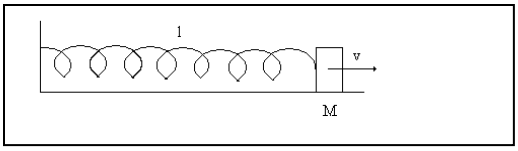


Exemple

a) déformation d'un ressort







le ressort applique sur le disque une force $\vec{F} = -k\overrightarrow{OM}$ soit $F_x = -kx$ avec $x = l - l_0$
La plupart des ressorts, dans des conditions normales d'utilisation (déformation raisonnable) se comportent de cette manière. K est appelé constante de raideur du ressort et pourrait être déterminé expérimentalement $k = m\omega^2 = m(\frac{2\pi}{T})^2$

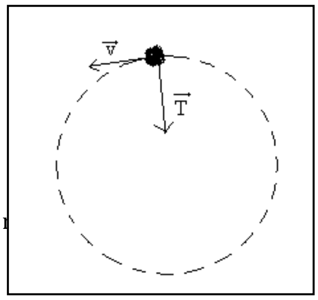
V.5- Force d'inertie (pseudo-force)

Nous avons défini dans un référentiel d'inertie la force ($\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}$). La force telle que l'a définie Newton est d'origine matérielle (la force de gravitation, force de frottement, force élastique). Comme l'accélération est une notion relative : un observateur qui se trouve dans un référentiel accéléré par rapport à celui d'inertie mesure une accélération $a_r \neq a_a$.

Par conséquent cet observateur ne pourra pas écrire la relation fondamentale de la dynamique : $\sum \vec{F} = m\vec{a}_r$ et attribuer une origine matérielle aux forces.

Exemple 1 : *objet dans un satellite*
Pour un observateur terrestre : l'objet tourne et il a donc une accélération (centripète) $\vec{a}$. Le poids : $P = \boldsymbol{G}\frac{\boldsymbol{m_T m}}{\boldsymbol{r^2}}$ avec m et m_T sont les masses de l'objet et de la Terre respectivement. Pour un observateur qui se trouve dans le satellite (cosmonaute) : l'objet est immobile car tous les deux ont le même mouvement et $a_r = 0$ et donc $ma_r = 0$. S'il sait que l'objet a un certain poids P il doit ajouter une force $\vec{f} = -\vec{P}$ pour que $m\vec{a}_r = \vec{0}$ soit vérifiée : $m\vec{a}_r = \vec{0} = \vec{f} + \vec{P}$. $\vec{f}$ a le même module que le poids. Le cosmonaute appelle cette force centrifuge.

Exemple 2 : ***pierre tournant autour d'une ficelle***

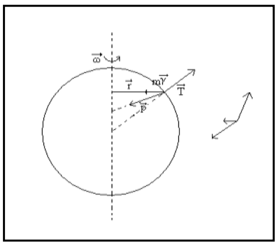


$\vec{T}$ tension du fil (force centripète). Pour un observateur au sol : $\vec{T} = m\vec{a}_N = m\frac{v^2}{r}\vec{u}$
Pour un observateur lié à la pierre : $m\vec{a}_r = \vec{0} = \vec{f} + \vec{T}$
$\vec{f}$: force centrifuge imaginaire : $\vec{T} = -m\vec{a}_r$
Cette force n'existe que pour l'observateur lié à la pierre ous l'appelons <u>force d'inertie</u> et n'a aucune origine matérielle. Elle n'est la cause d'aucun mouvement.
Elle permet seulement à un observateur non Galiléen d'écrire une relation analogue à la
dynamique.

Généralisation
Un observateur d'inertie écrit : $\sum \vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c)$
Un observateur accéléré par rapport à lui mesure une accélération $\vec{a}_r = \vec{a}_a - \vec{a}_e - \vec{a}_c$ et il peut écrire :
$m\vec{a}_r = \sum \vec{F} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c$ et donc $m\vec{a}_r = \sum \vec{F} + \sum \vec{f}$. En faisant intervenir les forces d'inertie : $\sum \vec{f} = -m\vec{a}_e - m\vec{a}_c$

Remarque
Un observateur en translation uniforme par rapport au repère d'inertie n'a pas besoin d'introduire la force d'inertie pour écrire la relation fondamentale de la dynamique.

Variation de la verticale à la surface de la terre



$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = -\vec{T}$ si la Terre ne tourne pas
$\vec{P} et \vec{T}$ sont respectivement le poids et la tension du fil à plomb.
$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$ *avec* $ma = m\omega^2 r$ Terre en rotation
Pour un observateur terrestre le fil à plomb est en Equilibre :
$\vec{P} + \vec{T} + \vec{f} = \vec{0}$ *avec* $\vec{f} = -m\vec{a}$ *est la force d'inertie* (centrifuge)
La direction du fil est déterminée par la relation $\vec{T} = -(\vec{P} + \vec{f})$

Pendule dans un véhicule (voir figure ci-contre)
Pour un observateur lié au sol $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$
Pour un observateur dans le véhicule
$\vec{P} + \vec{T} - \vec{f} = \vec{0}$